V онлайн-турнир 24 февраля 2012г.

на форуме

ALEXLARIN.COM

Решение задач. Часть В.

В1. Розничная цена учебника 138 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 3150 рублей?

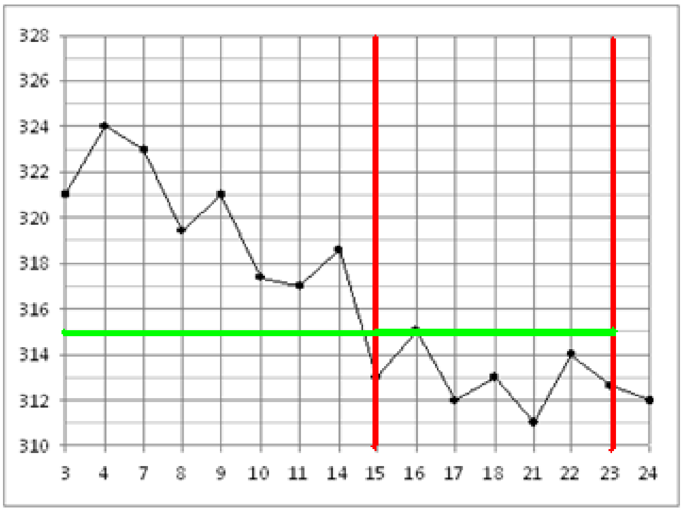
Пусть оптовая цена учебника x рублей, тогда

$$\left.\begin{matrix} x\text{ - }100\% \\ 138\text{ - }115\% \end{matrix}\right| \Rightarrow x=\frac{138\times100}{115}=6\times20=120(\textit{рублей})$$

$$3150:120=26(\textit{ост}.30)$$

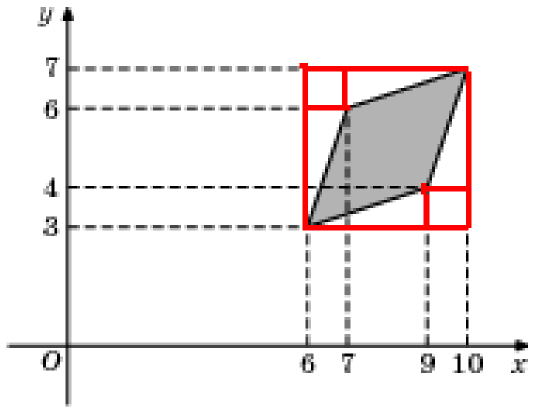
Ответ: 26

В2. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену золота на момент закрытия торгов в период с 15 по 23 октября (в долларах США за унцию).



Ответ: 315

B3. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (6;3), (9;4), (10;7), (7;6).



$S=S_{кв.}-2S_{м.\ кв}-4S_{тр}=4^2-2\cdot1^2-4\cdot1/2\cdot1\cdot3=8$

Ответ: 8

B4. Для остекления музейных витрин требуется заказать 40 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,15 $м^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	**Цена стекла (руб. за 1 $м^2$)**	**Резка стекла (руб. за одно стекло)**	**Дополнительные условия**
A	320	15	
B	310	20	
C	380	10	При заказе на сумму больше 2000 руб. резка бесплатно.

Для начала вычислим площадь необходимого нам стекла: $0,15\cdot40=6$(кв.м)

Фирма А: $6\cdot320+40\cdot15=1920+600=2520$(руб.)

Фирма В: $6\cdot310+40\cdot20=1860+800=2660$(руб.)

Фирма С: $6\cdot380=2280$ (руб.), так как заказ более 2000 руб., то резка бесплатна.

Ответ: 2280

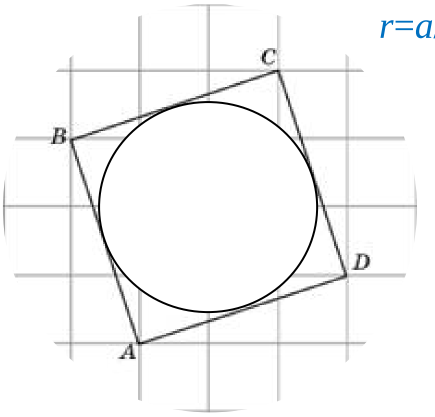
B5. Решить уравнение $\log_2(18-6x)=\log_{\sqrt{2}}9$.

$$\log_2(18-6x)=\log_{\sqrt{2}}9$$
$$\log_2(18-6x)=2\log_2 9$$
$$\log_2(18-6x)=\log_2 81$$
$$18-6x=81$$
$$6x=-63$$
$$x=-10,5$$

Ответ: -10,5

B6. Найдите радиус r окружности, вписанной в четырехугольник *ABCD*. В ответе

Укажите $r\sqrt{10}$



$r = a/2$, где a-сторона квадрата.

$$a = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$r = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$r\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{10} = 5$$

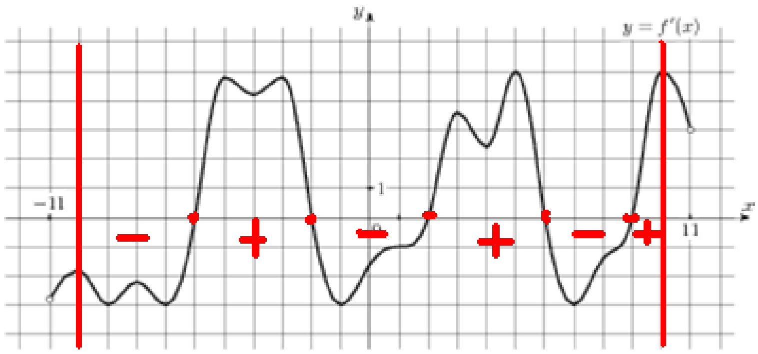
Ответ: 5

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

$$\frac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{14\sin(360+49)^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{14\sin 49^\circ}{\sin 49^\circ} = 14$$

Ответ: 14

B8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10;10]$.



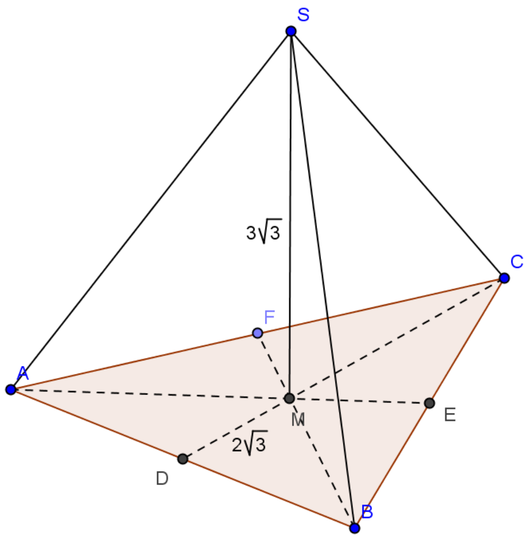
Точки экстремума функции $y = f(x)$ находятся среди её ***критических точек***, т.е. тех точек области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует. Это необходимое условие наличия экстремума, но не достаточное.

Достаточное условие экстремума: Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с + на - , то x_0 - точка локального максимума, если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с - на +, то x_0 - точка локального минимума, если же знак $f'(x)$ в точке x_0 не изменяется, то в точке x_0 экстремума не существует.

Следовательно, исходя из рисунка, делаем вывод, что количество таких точек равно 5.

Ответ: 5

B9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке ***M***. Радиус окружности, вписанной в основание, равен $2\sqrt{3}$, ***MS***$=3\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.



$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$h = SM = 3\sqrt{3}, \quad r = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\text{осн.}} = pr$$

$$DB = \frac{DM}{\operatorname{tg} 30^{\circ}} = r \cdot \operatorname{ctg} 30^{\circ} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow p = 18$$

$$S_{\text{осн.}} = 36\sqrt{3} \Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 108$$

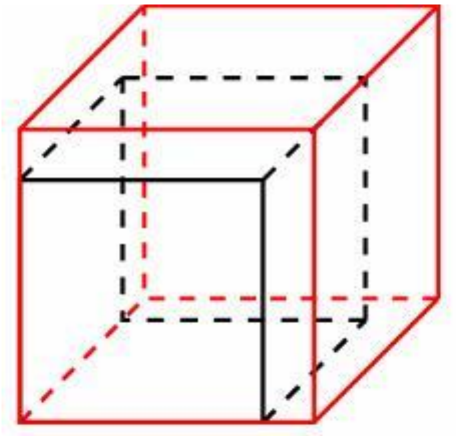
Ответ: 108

B10. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 120 качественных сумок приходится одиннадцать сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Так как имеется 120 качественных и 11 сумок с дефектами, то всего у нас имеется 131 сумка. Значит вероятность того, что купленная сумка окажется качественной равна $P(A) = \frac{120}{131} = 0,9160.... \approx 0,92$

Ответ: 0,92

B11. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.



Пусть ребро куба равно a, тогда $S_{пов.}=6a^2$

После увеличения ребра на 1, $S_{пов.}=6(a+1)^2$

$6(a+1)^2-6a^2=54$

$2a+1=9$

$a=4$

Ответ: 4

B12. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P=m\left(\frac{v^2}{L}-g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведерка в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с ^{2}). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

Вода не будет выливаться из ведерка, если давление будет неотрицательным, то есть

$$m\left(\frac{v^2}{0,4}-10\right)\geq 0 \Rightarrow \text{так как } m>0, \text{ то } \frac{v^2}{0,4}\geq 10 \Rightarrow v^2\geq 4 \Rightarrow v\geq 2,$$

Значит, наименьшая скорость равна 2.

Ответ: 2

B13. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 15 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

Пусть первый рабочий выполнит всю работу за x дней, а второй – за y дней.

1- объём всей работы.

Тогда производительность первого рабочего $\frac{1}{x}$, второго - $\frac{1}{y}$. За один день, работая вместе, они выполняют $\frac{1}{15}$ часть работы, значит $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$.

Учитывая, что за два дня первый выполняет такую же работу, что второй за три дня, получаем $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15} \\ \frac{2}{x}=\frac{3}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{15} \Rightarrow \frac{5}{3x}=\frac{1}{15} \Rightarrow x=25$$

Ответ: 25

B14. Найти наименьшее значение функции $y=2\cdot 9^{x}-3^{x+1}+1$.

Пусть $t=3^{x}, t>0$

$y(t)=2t^{2}-3t+1$

$2t^{2}-3t+1=2(t^{2}-2\cdot t\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{16})-\frac{9}{8}+1=2(t-\frac{3}{4})^{2}-\frac{1}{8}$

$y(t)\geq -\frac{1}{8}$, причем принимает наименьшее значение $-\frac{1}{8}$ при $t=\frac{3}{4}>0$

Значит, и функция $y(x)=2\cdot 9^{x}-3^{x+1}+1\geq -\frac{1}{8}=-0{,}125$

Ответ: -0,125